

УДК 539.3

О.А. Сергеев¹, В.Г. Киселев², С.А. Сергеева¹

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ПО ПРОЧНОСТИ И НА ПОЛОСЫ ДОПУСТИМЫХ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

¹Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева²Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Сформулирована постановка задачи многопараметрической оптимизации по весу стержневых систем при ограничениях по прочности, на полосы допустимых частот собственных колебаний и на предельные значения управляемых параметров, в качестве которых рассматриваются площади, размеры поперечных сечений и координаты узлов. Проведен аналитический анализ чувствительности для некратных частот собственных колебаний. Оптимальный проект достигается путем решения последовательности задач квадратичного программирования. Методика апробирована на тестовых конструкциях. Полученные в среде ANSYS результаты хорошо согласуются с результатами теоретических расчетов.

Ключевые слова: оптимизация, аналитический анализ чувствительности, линейно упругие стержневые конструкции, некратные частоты собственных колебаний

Введение

До сих пор значительная часть работ фокусируется на оптимизации размеров поперечных сечений ферм с ограничениями на частоты собственных колебаний. Существует немного работ по оптимальному проектированию стержневых конструкций с одновременным варьированием их формы и размеров поперечных сечений при ограничениях на частоты собственных колебаний.

В задачах проектирования конструкций желательнее получить такую конструкцию, у которой собственные частоты лежат вне запрещенной полосы [1]. Для вывода собственных частот из нежелательного интервала существует много причин, например, когда возбуждающая частота лежит в этом интервале, частота вращения ротора вертолета изменяется в этой недопустимой полосе, частоты аэроупругих сил попадают в этот интервал и т.д.

Настоящее исследование посвящено разработке эффективного метода анализа чувствительности и оптимизации стержневых конструкций с некратными частотами собственных колебаний [2-5] и тестированию возможностей программного комплекса ANSYS [6]. На примерах демонстрируется достоверность, пригодность, надежность методики оптимального проектирования стержневых конструкций с учетом ограничений по прочности и на полосы допустимых частот собственных колебаний.

Постановка задачи оптимизации

Задача оптимального проектирования по весу стержневой конструкции может быть сформулирована как задача нелинейного условного программирования [7]: требуется найти такие значения управляемых параметров $\{X^*\}$ (координаты узлов, площади, размеры поперечных сечений) из области допустимых значений F , для которых вес конструкции будет минимальным:

$$W(\{X^*\}) = \min_{\{X\} \in F} \sum_{e=1}^k \rho_e A_e(\{X\}) L_e(\{X\}), \quad (1)$$

где ρ_e – плотность материала элемента, A_e – площадь поперечного сечения элемента, L_e – длина элемента, k – число элементов.

Область допустимых значений F определяется ограничениями на эквивалентные напряжения в объемах элементов, собственные частоты, ограничениями на варьируемые параметры конструкции:

$$F = \{ \{X\} : \sigma_{\text{экв}}^e(\{X\}) \leq [\sigma], e = \overline{1, k}, \\ \omega_i(\{X\}) \leq \tilde{\omega}, \\ \omega_j(\{X\}) \geq \hat{\omega}, j = i+1, \\ \{X\}_{\min} \leq \{X\} \leq \{X\}_{\max} \} \quad (2)$$

$\sigma_{\text{экв}}^e$ – эквивалентные напряжения в объемах элементов, $[\sigma]$ – допустимое напряжение, ω_i, ω_j – собственные частоты, $\tilde{\omega}, \hat{\omega}$ – нижняя и верхняя границы запрещенной полосы частот, $\{X\}_{\min}, \{X\}_{\max}$ – нижние и верхние пределы на варьируемые параметры.

Анализ напряженно деформированного состояния

Методика расчета НДС основана на допущении об однородности и линейной упругости материала, принципе Сен-Венана, принципе независимости действия нагрузок, гипотезе плоских сечений при изгибе и кручении.

Линейные и угловые перемещения узлов стержневой конструкции определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений МКЭ:

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (3)$$

$[K]$ – матрица жесткости конструкции, $\{U\}$ – вектор узловых перемещений, $\{P\}$ – вектор внешних узловых нагрузок.

Матрица жесткости $[K]$ зависит от переменных проектирования $\{X\}$. Вектор нагрузки $\{P\}$ может также зависеть от переменных проектирования $\{X\}$.

Эквивалентные напряжения в e -ом элементе зависят от переменных проектирования $\{X\}$ и в точке с координатами x_1, y_1, z_1 вычисляются по гипотезе энергии формоизменения (vonMises):

$$\sigma_{\text{экв}}^e(x_1, y_1, z_1, \{X\}) = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (4)$$

Модальный анализ

Модальный анализ проводится для определения частот и форм собственных колебаний конструкции. Модальный анализ предполагает, что система является линейной. Все виды нелинейности – нелинейное поведение материала, контактные граничные условия, конечные перемещения игнорируются.

Предполагается, что внешние силы и демпфирование равны нулю. Уравнение свободных колебаний конструкции в матричной форме имеет вид:

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{0\} \quad (5)$$

где $[M]$ – матрица масс конструкции, $\{U\}$ – вектор узловых перемещений конструкции, $\{\ddot{U}\}$ – вектор ускорений точек конструкции.

Для линейной системы свободные колебания являются гармоническими и могут быть записаны в виде (если не приложено никаких внешних нагрузок, то конструкция предполагается свободно вибрирующей по гармоническому закону):

$$\{U\} = \{\Phi\}_j \cos \omega_j t \quad (6)$$

где $\{\Phi\}_j$ – j -ый собственный вектор, представляющий форму колебаний на j -ой собственной частоте, ω_j – j -ая собственная частота, t – время.

Подставляя (6) в (5), получим:

$$([K] - \omega_j^2[M]) \{\Phi\}_j = \{0\} \quad (7)$$

Это равенство удовлетворяется, если $\{\Phi\}_j = 0$ или определитель матрицы $([K] - \omega^2[M])$ равен нулю:

$$\text{Det}([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (8)$$

Первый случай даёт тривиальное решение и поэтому не интересен. Второй случай приводит к обобщённой проблеме собственных значений (7).

Решением обобщённой проблемы собственных значений являются n пар собственных частот $\lambda_j = \omega_j^2$ и собственных векторов $\{\Phi\}_j$, где n – порядок системы, т.е. общее число степеней свободы конструкции. Наряду с круговой собственной частотой ω_j может быть введена собственная частота, представляющая собой число колебаний в единицу времени $\omega_j / 2\pi$ [Гц].

В работе рассматриваются простые или некрратные частоты собственных колебаний и они могут быть упорядочены

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_j < \dots < \omega_n \quad (9)$$

Векторы $\{\Phi\}_j$ являются $[M]$ -нормированными, т.е.

$$\{\Phi\}_j^T [M] \{\Phi\}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Анализ чувствительности некрратных частот

Производные от некрратных частот определяются из (7) прямым дифференцированием, т.е.

$$\frac{\partial [K]}{\partial X} \{\Phi\}_j - 2\omega_j \frac{\partial \omega_j}{\partial X} [M] \{\Phi\}_j - \omega_j^2 \frac{\partial [M]}{\partial X} \{\Phi\}_j + ([K] - \omega_j^2 [M]) \frac{\partial \{\Phi\}_j}{\partial X} = 0, \quad (11)$$

где X – один из варьируемых параметров.

Умножая уравнение (11) слева на $\{\Phi\}_j^T$ и используя уравнение (7), получим чувствительности или производные частот собственных колебаний по варьируемому параметру X

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial X} = \frac{1}{2\omega_j} \{\Phi\}_j^T \left(\frac{\partial [K]}{\partial X} - \omega_j^2 \frac{\partial [M]}{\partial X} \right) \{\Phi\}_j. \quad (12)$$

Производные матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$ конструкции по координате Хуэла имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [K]}{\partial X} &= \sum_e \left(\frac{\partial [C_{4e}]^T}{\partial X} [K_e] [C_{4e}] + [C_{4e}]^T [K_e] \frac{\partial [C_{4e}]}{\partial X} + [C_{4e}]^T \frac{\partial [K_e]}{\partial X} [C_{4e}] \right), \\ \frac{\partial [M]}{\partial X} &= \sum_e \left(\frac{\partial [C_{4e}]^T}{\partial X} [M_e] [C_{4e}] + [C_{4e}]^T [M_e] \frac{\partial [C_{4e}]}{\partial X} + [C_{4e}]^T \frac{\partial [M_e]}{\partial X} [C_{4e}] \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $[C_{4e}]$ – блочно-диагональная матрица, состоящая из четырех ортогональных матриц $[c_e]$ перехода из глобальной в локальную систему координат элемента; $[K_e]$, $[M_e]$ – матрицы жесткости и масс элемента в локальной системе координат.

Производные матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$ конструкции по площади A_j поперечного сечения элемента имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial [K]}{\partial A_j} &= \frac{1}{A_j} \sum_e ([C_{4e}]^T [K_e] [C_{4e}]), \\ \frac{\partial [M]}{\partial A_j} &= \frac{1}{A_j} \sum_e ([C_{4e}]^T [M_e] [C_{4e}]).\end{aligned}\quad (14)$$

Если варьируемые параметры X_i , $i = \overline{1, m}$ изменяются одновременно, тогда можно найти приращение частоты собственных колебаний ω_j в форме

$$\Delta\omega_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \omega_j}{\partial X_i} \Delta X_i = \nabla^T \omega_j \{\Delta X\}.\quad (15)$$

Аппроксимация задачи оптимизации

Задача оптимизации (1–2) может быть сформулирована следующим образом:

$$\underset{\{X\} \in \tilde{F}}{\text{Minimize}} \left(\Delta W = \nabla^T W(\{X\}) \{\Delta X\} + \frac{1}{2} \{\Delta X\}^T [H] \{\Delta X\} \right),\quad (16)$$

где $[H]$ – матрица Гессе, образованная вторыми частными производными функции Лагранжа, $\nabla^T = \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_m} \right\}$. Допустимая область \tilde{F} определяется линейными аппроксимациями активных ограничений

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экс}}^e(\{X\}) + \nabla^T \sigma_{\text{экс}}^e(\{X\}) \{\Delta X\} &\leq [\sigma], \\ \omega_i(\{X\}) + \nabla^T \omega_i(\{X\}) \{\Delta X\} &\leq \tilde{\omega}, \\ \omega_j(\{X\}) + \nabla^T \omega_j(\{X\}) \{\Delta X\} &\geq \tilde{\omega}, \quad j = i+1,\end{aligned}\quad (17)$$

где $\{\Delta X\}$ определяется как

$$\begin{aligned}\{\Delta X\}_{\min} &\leq \{\Delta X\} \leq \{\Delta X\}_{\max}, \\ \{\Delta X\}_{\max} &= \frac{\{X\}_{\max} - \{X\}_{\min}}{10}, \quad \{\Delta X\}_{\min} = -\{\Delta X\}_{\max}.\end{aligned}\quad (18)$$

Пример 1. Ступенчатый вал с 5 варьируемыми параметрами

На рис. 1 показан ступенчатый вал, длина которого 10 м, он разбит на 10 конечных элементов одинаковой длины. В узле 6 вала приложена сосредоточенная масса 6125.28 кг.

В качестве ограничений рассматриваются ограничения на собственные частоты $\omega_1 \leq 31.831$ Гц, $\omega_2 \geq 95.493$ Гц и переменные проектирования вала $0.5 \text{ м} \leq D_i \leq 2 \text{ м}$, $i = \overline{1, 5}$.

Задача оптимизации сводится к нахождению таких значений диаметров поперечных сечений D_i , $i = \overline{1, 5}$, для которых вес вала $\sum_{i=1}^5 2\rho \left(\frac{\pi D_i^2}{4} \right) L_i$ будет минимальным.

На рис. 2 показаны независимые варьируемые параметры вала – пять диаметров поперечных сечений вала D_i , $i = \overline{1, 5}$. На рис. 3 показана оптимальная форма вала. На рис. 4–6 представлен процесс продвижения к оптимуму. На рис. 7 представлены первая и вторая собственные моды вала. Оптимальные значения диаметров и веса вала показаны в табл. 1.

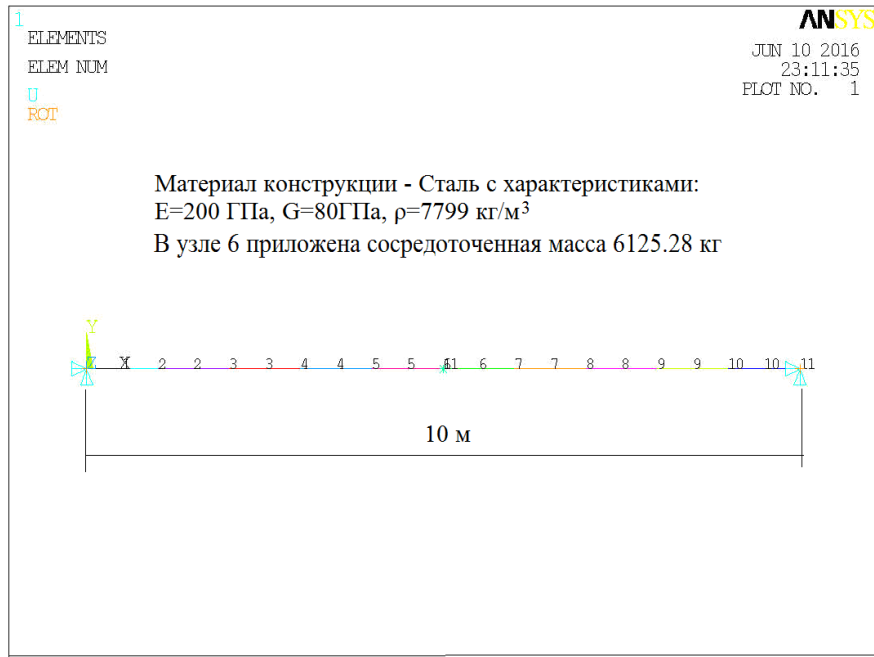


Рис. 1. КЭ модель

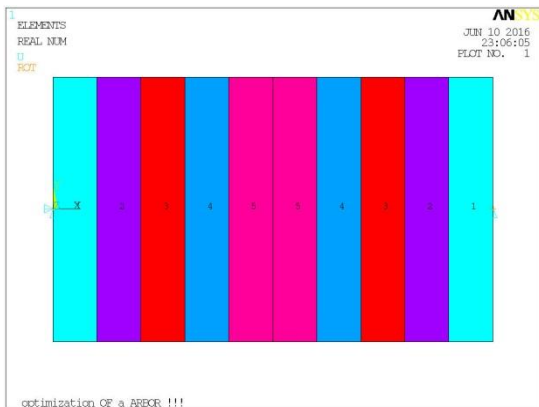


Рис. 2. Начальная форма

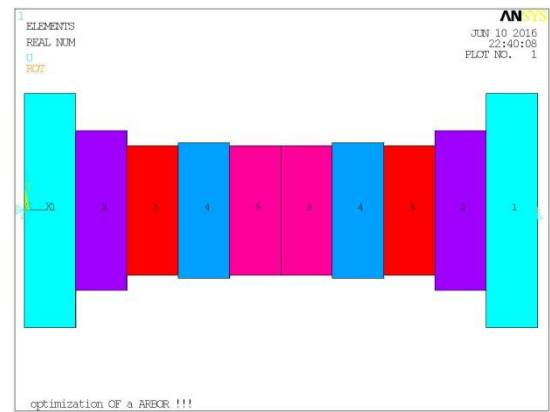


Рис. 3. Оптимальная форма

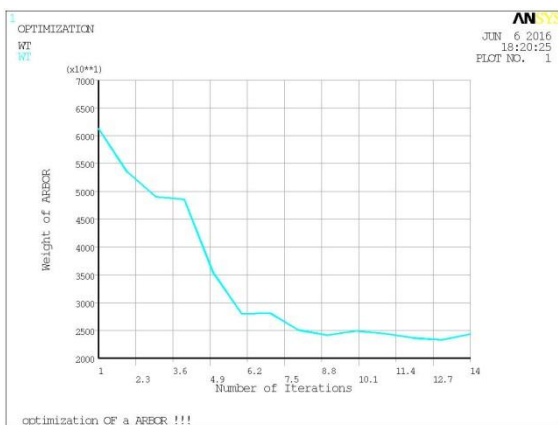


Рис. 4. График зависимости целевой функции от числа итераций

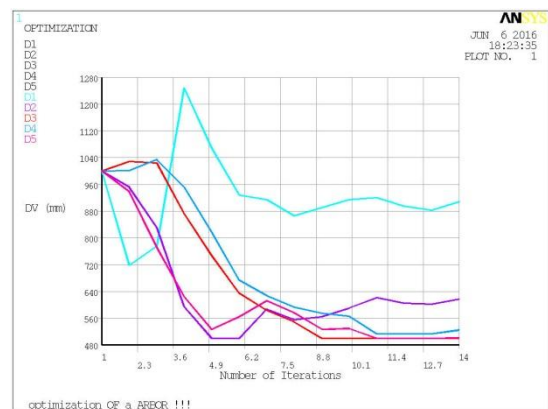


Рис. 5. Графики зависимости варьируемых параметров от числа итераций

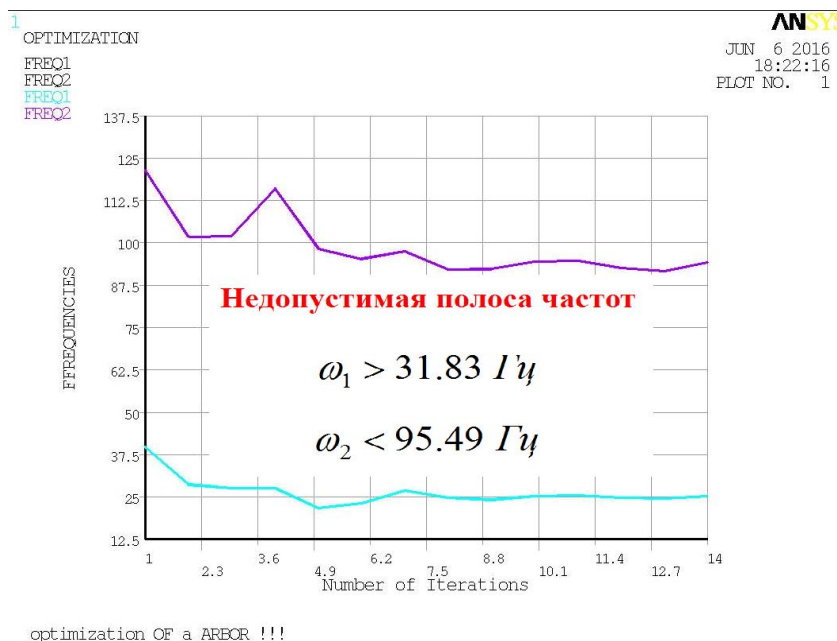


Рис. 6. Графики зависимости частот от числа итераций

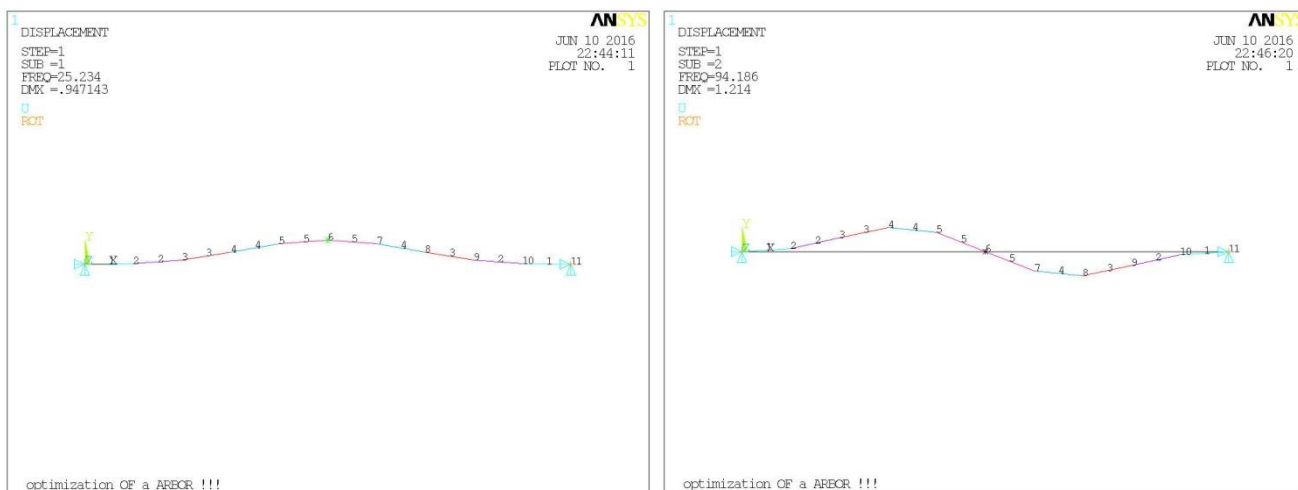


Рис. 7. Первая и вторая моды

Таблица 1
Оптимальные вес, диаметры, частоты ступенчатого вала

| Варьируемые параметры | Начальные значения, м | Оптимальные значения, м |
|------------------------|-----------------------|-------------------------|
| D_1 | 1 | 0.92039 |
| D_2 | 1 | 0.62136 |
| D_3 | 1 | 0.5 |
| D_4 | 1 | 0.51386 |
| D_5 | 1 | 0.5 |
| $\omega_1, \text{ Гц}$ | 39.75 | 25.43 |
| $\omega_2, \text{ Гц}$ | 121.38 | 94.71 |
| Вес, кг | 600892 | 240031 |

Пример 2. Мостовая ферма с 20 варьируемыми параметрами

На рис. 8 показана мостовая ферма длиной 21 м, состоящая из 7 секций, имеющая 36 элементов, 16 узлов. Сосредоточенные силы $P = 98100 \text{ кГ}$ и сосредоточенные массы 1000 кг приложены в узлах нижнего пояса. Собственный вес элементов фермы во внимание не принимается.

В качестве варьируемых параметров рассматриваются две группы. Ординаты узлов верхнего пояса мостовой фермы связываются с учетом симметрии в 4 типа через переменные проектирования Y_4, Y_5, Y_8, Y_9 . Ферменные элементы объединяются в 16 типов через площади поперечных сечений $A_i, i = \overline{1,16}$.

В качестве ограничений рассматриваются ограничения на напряжения в элементах $\sigma^e \leq 157 \text{ МПа}$, $e = \overline{1,36}$, на собственные частоты $\omega_1 \leq 16 \text{ Гц}$, $\omega_2 \geq 32 \text{ Гц}$ и ограничения на переменные проектирования $1 \text{ м} \leq Y_i \leq 5 \text{ м}$, $i = \overline{1,4}$, $0.0025 \text{ м}^2 \leq A_i \leq 0.05 \text{ м}^2$, $i = \overline{1,16}$.

Задача оптимизации сводится к нахождению таких значений ординат $Y_i, i = \overline{1,4}$, площадей $A_i, i = \overline{1,16}$ поперечных сечений, для которых вес мостовой фермы $\sum_{i=1}^{36} \rho A_i L_i$ будет минимальным.

На рис. 9 показаны независимые варьируемые параметры мостовой фермы – 4 ординаты узлов $Y_i, i = \overline{1,4}$ верхнего пояса и 16 площадей поперечных сечений $A_i, i = \overline{1,16}$ элементов. На рис. 10 показана оптимальная форма мостовой фермы. На рис. 11-14 представлен процесс продвижения к оптимуму. На рис. 15 и 16 представлены первая и вторая собственные моды мостовой фермы. На рис. 17-19 для оптимального проекта мостовой фермы представлены деформированное состояние, эпюры продольных сил и нормальных напряжений. В табл. 2 показаны оптимальные значения ординат узлов верхнего пояса, площадей поперечных сечений элементов и веса мостовой фермы.

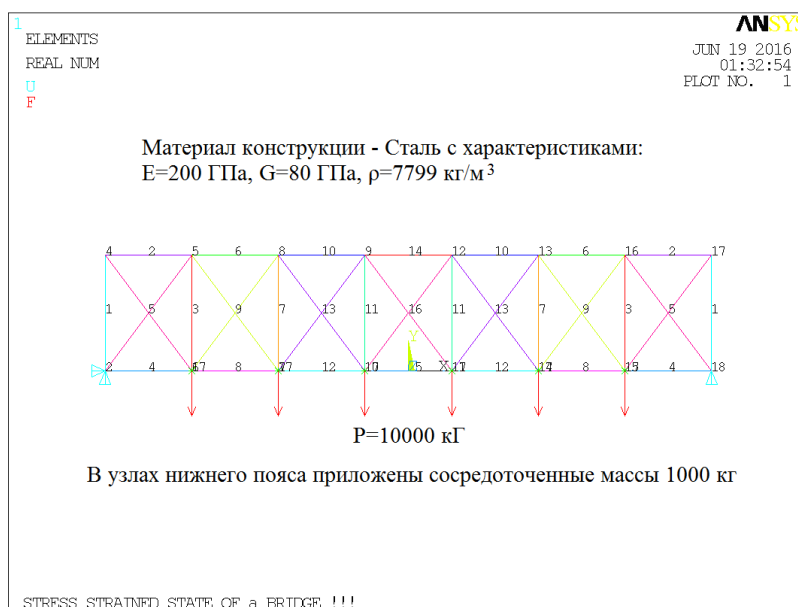


Рис. 8. Начальная КЭ модель

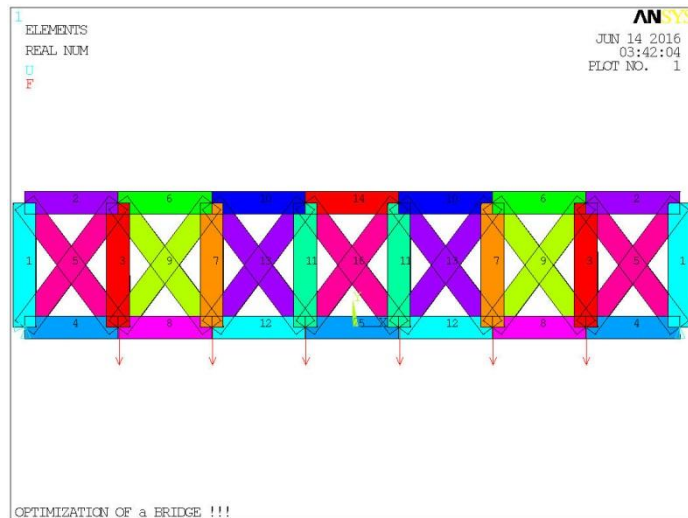


Рис. 9. Начальная форма

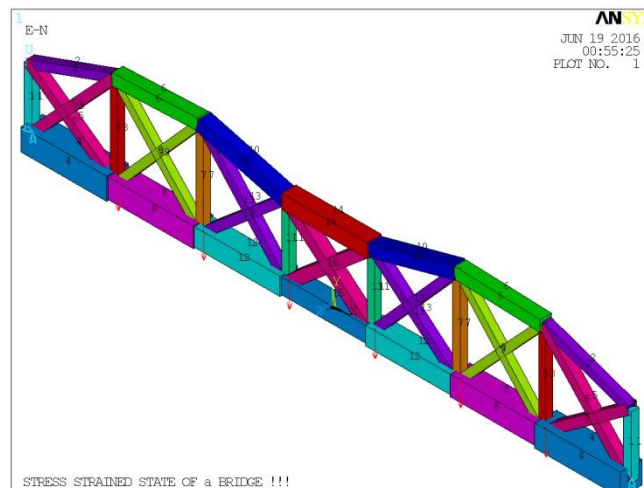


Рис. 10. Оптимальная форма

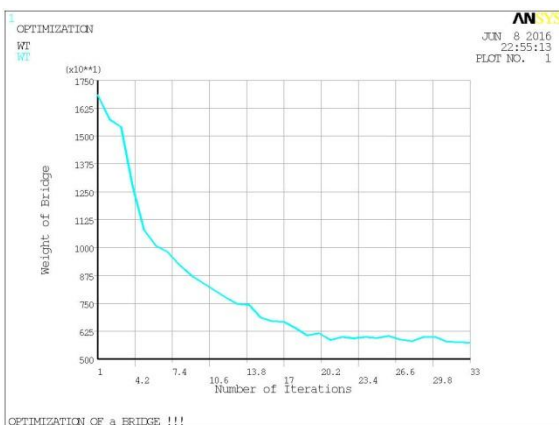


Рис. 11. График зависимости целевой функции от числа итераций

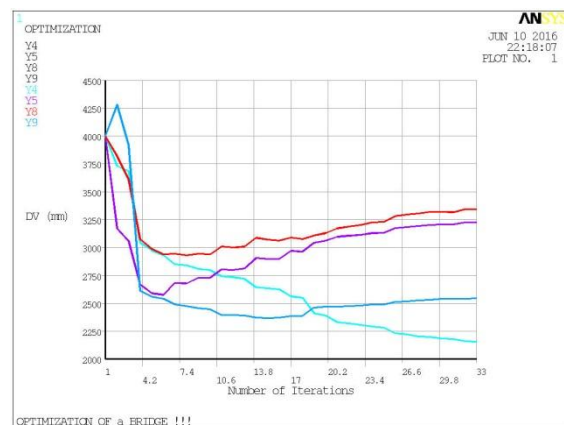


Рис. 12. Графики зависимости варьируемых ординат узлов от числа итераций

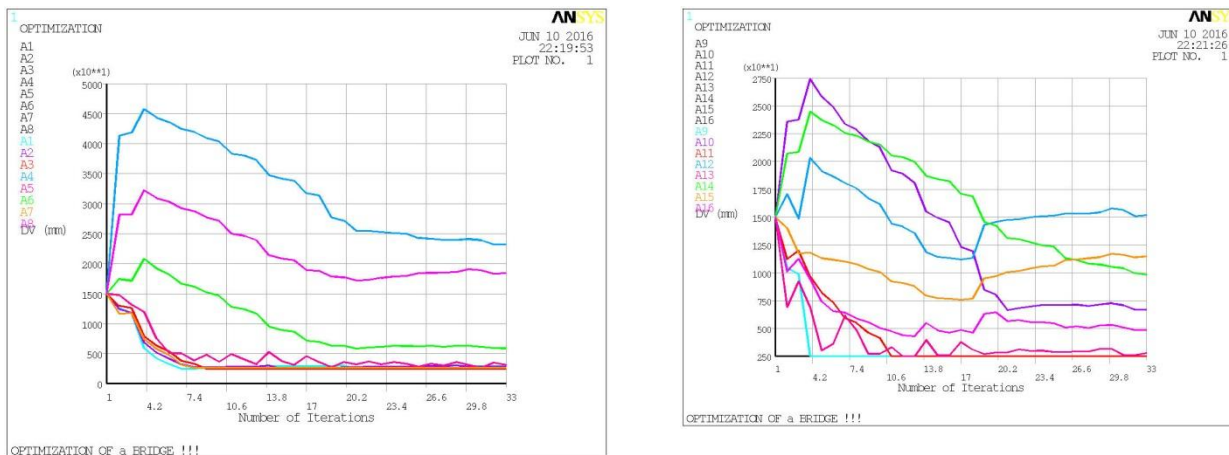


Рис. 13. Графики зависимости варьируемых площадей от числа итераций

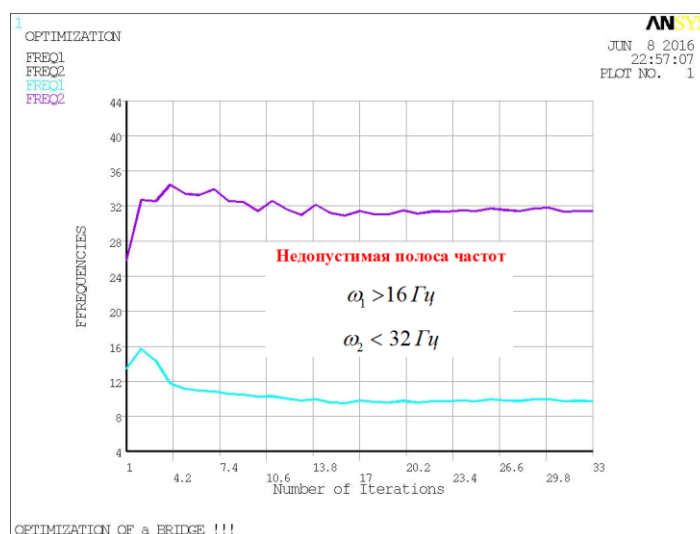


Рис. 14. Графики зависимости частот от числа итераций

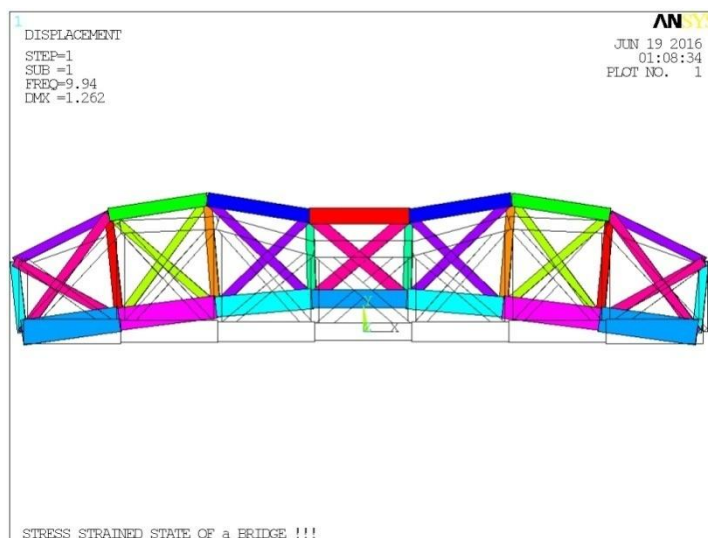


Рис. 15. Первая мода оптимального проекта

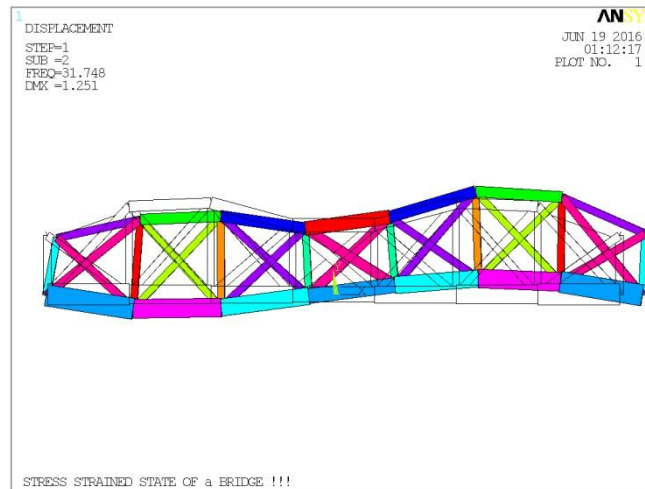


Рис. 16. Вторая мода оптимального проекта

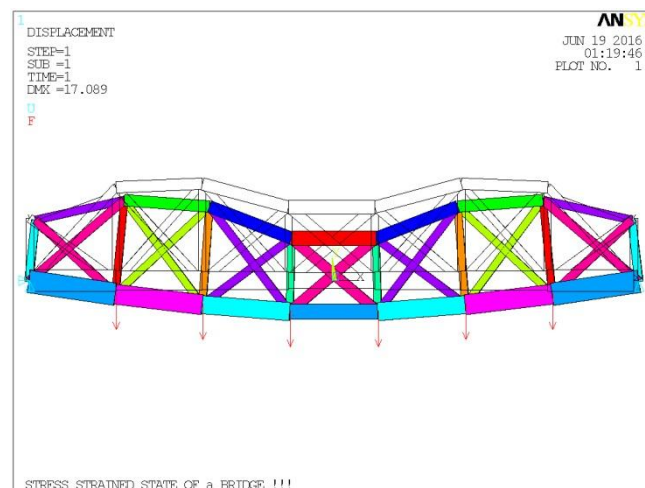


Рис. 17. Деформированное состояние оптимального проекта

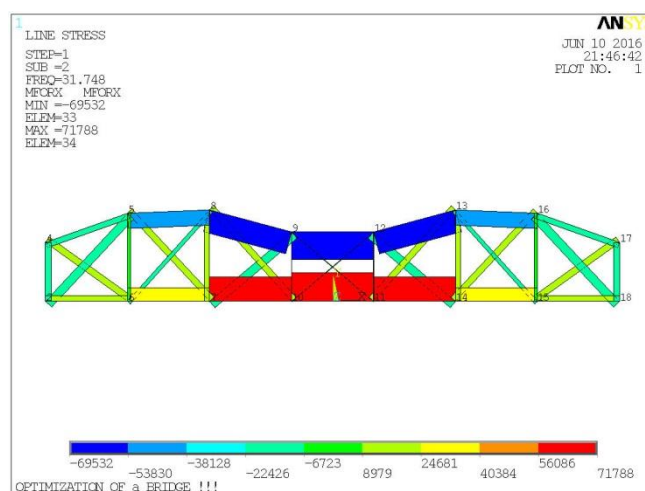


Рис. 18. Эпюра продольных сил оптимального проекта

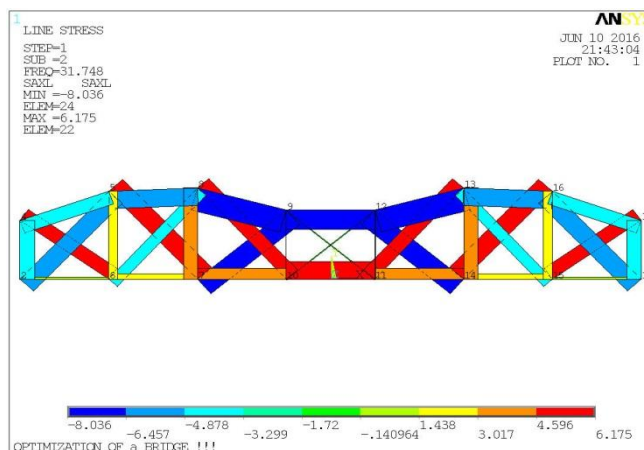


Рис. 19. Эпюра нормальных напряжений оптимального проекта

Таблица 2
Оптимальные вес, ординаты, площади, частоты мостовой фермы

| Варьируемые параметры | Начальные значения | Оптимальные значения |
|------------------------|--------------------|----------------------|
| $Y_4, \text{ м}$ | 4 | 2.1619 |
| $Y_5, \text{ м}$ | 4 | 3.2345 |
| $Y_8, \text{ м}$ | 4 | 3.3572 |
| $Y_9, \text{ м}$ | 4 | 2.5474 |
| $A_1, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.003041 |
| $A_2, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0030041 |
| $A_3, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0025 |
| $A_4, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.023511 |
| $A_5, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0034972 |
| $A_6, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0062345 |
| $A_7, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0026764 |
| $A_8, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.018824 |
| $A_9, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0025 |
| $A_{10}, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0070623 |
| $A_{11}, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0025 |
| $A_{12}, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.01551 |
| $A_{13}, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0030931 |
| $A_{14}, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.010046 |
| $A_{15}, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.011672 |
| $A_{16}, \text{ м}^2$ | 0.015 | 0.0052163 |
| $\omega_1, \text{ Гц}$ | 13.47 | 9.94 |
| $\omega_2, \text{ Гц}$ | 25.81 | 31.75 |
| Вес, Н | 165259 | 58702.1 |

Выводы

Расширены проведенные предыдущие анализы и рассмотрено одновременное варьирование координат узлов конструкции, площадей, размеров поперечных сечений. Важно отметить, что стержневые конструкции являются более чувствительными к варьированию координат узлов. Одновременное варьирование координат узлов, площадей и размеров поперечных сечений дает более эффективные проекты, а использование ограничений на напряжения в элементах конструкции и частоты собственных колебаний гарантирует практически оптимальные проекты, для которых контролируются статические и динамические отклики.

Приложения

П1. Матрицы жесткости и масс для балочного элемента

Матрицы жесткости и масс конструкции $[K]$ и $[M]$ собираются из матриц жесткости масс элементов в местной системе координат $[K_e]$ и $[M_e]$ (опуская Булевы матрицы)

$$[K] = \sum_e [c_{4e}]^T [K_e] [c_{4e}], \quad (\text{П1-1})$$

$$[M] = \sum_e [c_{4e}]^T [M_e] [c_{4e}]$$

где $[C_{4e}]$ – блочно-диагональная матрица, состоящая из четырех ортогональных матриц $[c_e]$ перехода из глобальной в локальную систему координат элемента; $[K_e]$, $[M_e]$ – матрицы жесткости и масс элемента в локальной системе координат.

Матрица жесткости элемента имеет вид

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_3] & -[K_1] & [K_3] \\ [K_3]^T & [K_2] & -[K_3]^T & [K_4] \\ -[K_1] & -[K_3] & [K_1] & -[K_3] \\ [K_3]^T & [K_4] & -[K_3]^T & [K_2] \end{bmatrix}, \quad (\text{П1-2})$$

где

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{E_e a_e}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_e I_{z_{1e}}}{L_e^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12E_e I_{y_{1e}}}{L_e^3} \end{bmatrix}, \quad [K_2] = \begin{bmatrix} \frac{G_e I_{x_{1e}}}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4E_e I_{y_{1e}}}{L_e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4E_e I_{z_{1e}}}{L_e} \end{bmatrix},$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E_e I_{z_{1e}}}{L_e^2} \\ 0 & -\frac{6E_e I_{y_{1e}}}{L_e^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad [K_4] = \begin{bmatrix} -\frac{G_e I_{x_{1e}}}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E_e I_{y_{1e}}}{L_e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_e I_{z_{1e}}}{L_e} \end{bmatrix},$$

где $E_e, G_e, I_{x_{1e}}, I_{y_{1e}}, I_{z_{1e}}$ и a_e, L_e – модули Юнга, сдвига, осевые моменты инерции и площадь поперечного сечения, длина элемента соответственно.

Матрица масс элемента определяется как

$$[M_e] = \frac{\rho_e a_e L_e}{420} \begin{bmatrix} [M_1] & [M_3] & [M_4] & [M_5] \\ [M_3]^T & [M_2] & [M_5] & [M_6] \\ [M_4] & [M_5]^T & [M_1] & -[M_3] \\ [M_5]^T & [M_6] & [M_3] & [M_2] \end{bmatrix}, \quad (\text{П1-3})$$

где

$$[M_1] = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 \\ 0 & 0 & 156 \end{bmatrix}, \quad [M_2] = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 \\ 0 & 4L_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix},$$

$$[M_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22L_e \\ 0 & -22L_e & 0 \end{bmatrix}, \quad [M_4] = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 54 \end{bmatrix},$$

$$[M_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13L_e \\ 0 & 13L_e & 0 \end{bmatrix}, \quad [M_6] = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & -3L_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3L_e^2 \end{bmatrix},$$

где ρ_e – плотность материала элемента.

Правила описания локальной системы координат $x_{1e}y_{1e}z_{1e}$ следующие.

1. Глобальная система координат XYZ является правой.
2. Локальная система координат $x_{1e}y_{1e}z_{1e}$ является правой.
3. Ось x_{1e} является осью элемента, оси y_{1e}, z_{1e} – главные центральные оси поперечного сечения элемента.
4. Вспомогательная ось z' перпендикулярна осям x_{1e} и Z и формирует правую тройку ($\text{Pr}_{XY} x_{1e}$) $z' Z$.
5. Ось z_{1e} составляет с вспомогательной осью z' угол α , отсчитываемый от z' к z_{1e} вокруг оси x_{1e} по принципу правого винта.
6. Если ось x_{1e} параллельна оси Z, тогда ось z' параллельна глобальной оси X.

Матрица $[c_e]$ перехода из глобальной в локальную систему координат элемента имеет вид

$$[c_e] = \begin{bmatrix} \text{Cos}[X, x_{1e}] & \text{Cos}[Y, x_{1e}] & \text{Cos}[Z, x_{1e}] \\ \text{Cos}[X, y_{1e}] & \text{Cos}[Y, y_{1e}] & \text{Cos}[Z, y_{1e}] \\ \text{Cos}[X, z_{1e}] & \text{Cos}[Y, z_{1e}] & \text{Cos}[Z, z_{1e}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_e & \bar{\mu}_e & \bar{\eta}_e \\ \bar{\gamma}_e & \bar{\mu}_e & \bar{\eta}_e \\ \bar{\gamma}_e & \bar{\mu}_e & \bar{\eta}_e \end{bmatrix}, \quad (\text{П1-4})$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_e &= (\gamma_e \eta_e \cos[\alpha] - \mu_e \sin[\alpha]) / \beta_e, \\ \bar{\mu}_e &= (\mu_e \eta_e \cos[\alpha] + \gamma_e \sin[\alpha]) / \beta_e, \\ \bar{\eta}_e &= -\beta_e \cos[\alpha], \\ \bar{\bar{\gamma}}_e &= (-\mu_e \cos[\alpha] - \gamma_e \eta_e \sin[\alpha]) / \beta_e, \\ \bar{\bar{\mu}}_e &= (\gamma_e \cos[\alpha] - \mu_e \eta_e \sin[\alpha]) / \beta_e, \\ \bar{\bar{\eta}}_e &= \beta_e \sin[\alpha], \\ \beta_e &= \sqrt{\gamma_e^2 + \mu_e^2}.\end{aligned}$$

П2. Анализ чувствительности матриц жесткости, масс конструкции и матрицы перехода из глобальной системы координат в локальную

Для стержневых конструкций с представленными выше правилами описания локальных систем координат элементов получены аналитические выражения производных

$\langle \frac{\partial [K]}{\partial \{X\}} \rangle$ и $\langle \frac{\partial [M]}{\partial \{X\}} \rangle$, где символы $\langle \rangle$ обозначают пакет матриц.

Производные матрицы перехода $[c_e]$ по координатам узлов определяются как

$$\frac{\partial \gamma_e}{\partial X_i} = \frac{\chi_i (1 - \gamma_e^2)}{L_e}, \quad \frac{\partial \mu_e}{\partial X_i} = -\frac{\chi_i \mu_e \gamma_e}{L_e}, \quad \frac{\partial \eta_e}{\partial X_i} = -\frac{\chi_i \eta_e \gamma_e}{L_e},$$

$$\frac{\partial \gamma_e}{\partial Y_i} = -\frac{\chi_i \mu_e \gamma_e}{L_e}, \quad \frac{\partial \mu_e}{\partial Y_i} = \frac{\chi_i (1 - \mu_e^2)}{L_e}, \quad \frac{\partial \eta_e}{\partial Y_i} = -\frac{\chi_i \eta_e \mu_e}{L_e},$$

$$\frac{\partial \gamma_e}{\partial Z_i} = -\frac{\chi_i \eta_e \gamma_e}{L_e}, \quad \frac{\partial \mu_e}{\partial Z_i} = -\frac{\chi_i \eta_e \mu_e}{L_e}, \quad \frac{\partial \eta_e}{\partial Z_i} = \frac{\chi_i (1 - \eta_e^2)}{L_e},$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_e}{\partial X_i} = -\chi_i (\eta_e (\gamma_e^4 + \gamma_e^2 \mu_e^2 - \mu_e^2) \cos[\alpha] - \gamma_e \mu_e \sin[\alpha]) / (L_e \beta_e^3),$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}_e}{\partial X_i} = -\chi_i \mu_e (\gamma_e \eta_e (2 - \eta_e^2) \cos[\alpha] - \mu_e \sin[\alpha]) / (L_e \beta_e^3),$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}_e}{\partial X_i} = -\chi_i \gamma_e \eta_e^2 \cos[\alpha] / (L_e \beta_e),$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\gamma}}_e}{\partial Y_i} = -\chi_i \gamma_e (\mu_e \eta_e (2 - \eta_e^2) \cos[\alpha] + \gamma_e \sin[\alpha]) / (L_e \beta_e^3),$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\mu}}_e}{\partial Y_i} = -\chi_i (\eta_e (\mu_e^4 + \mu_e^2 \gamma_e^2 - \gamma_e^2) \cos[\alpha] + \gamma_e \mu_e \sin[\alpha]) / (L_e \beta_e^3),$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\eta}}_e}{\partial Y_i} = -\chi_i \mu_e \eta_e^2 \cos[\alpha] / (L_e \beta_e),$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_e}{\partial Z_i} = \chi_i \gamma_e \beta_e \cos[\alpha] / L_e,$$

$$\frac{\partial \bar{\mu}_e}{\partial Z_i} = \chi_i \mu_e \beta_e \cos[\alpha] / L_e,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\eta}_e}{\partial Z_i} &= \chi_i \eta_e \beta_e \text{Cos}[\alpha] / L_e, \\ \frac{\partial \bar{\gamma}_e}{\partial X_i} &= -\chi_i (-\eta_e (\gamma_e^4 + \gamma_e^2 \mu_e^2 - \mu_e^2) \text{Sin}[\alpha] - \gamma_e \mu_e \text{Cos}[\alpha]) / (L_e \beta_e^3), \\ \frac{\partial \bar{\mu}_e}{\partial X_i} &= -\chi_i \mu_e (-\gamma_e \eta_e (2 - \eta_e^2) \text{Sin}[\alpha] - \mu_e \text{Cos}[\alpha]) / (L_e \beta_e^3), \\ \frac{\partial \bar{\eta}_e}{\partial X_i} &= \chi_i \gamma_e \eta_e^2 \text{Sin}[\alpha] / (L_e \beta_e), \\ \frac{\partial \bar{\gamma}_e}{\partial Y_i} &= -\chi_i \gamma_e (-\mu_e \eta_e (2 - \eta_e^2) \text{Sin}[\alpha] + \gamma_e \text{Cos}[\alpha]) / (L_e \beta_e^3), \\ \frac{\partial \bar{\mu}_e}{\partial Y_i} &= -\chi_i (-\eta_e (\mu_e^4 + \mu_e^2 \gamma_e^2 - \gamma_e^2) \text{Sin}[\alpha] + \gamma_e \mu_e \text{Cos}[\alpha]) / (L_e \beta_e^3), \\ \frac{\partial \bar{\eta}_e}{\partial Y_i} &= \chi_i \mu_e \eta_e^2 \text{Sin}[\alpha] / (L_e \beta_e), \\ \frac{\partial \bar{\gamma}_e}{\partial Z_i} &= -\chi_i \gamma_e \beta_e \text{Sin}[\alpha] / L_e, \\ \frac{\partial \bar{\mu}_e}{\partial Z_i} &= -\chi_i \mu_e \beta_e \text{Sin}[\alpha] / L_e, \\ \frac{\partial \bar{\eta}_e}{\partial Z_i} &= -\chi_i \eta_e \beta_e \text{Sin}[\alpha] / L_e, \end{aligned}$$

где $\chi_i = \begin{cases} -1, & \text{узел в начале элемента,} \\ 1, & \text{узел в конце элемента.} \end{cases}$

Если ось x_{1e} параллельна глобальной оси Z , тогда производной $\left\langle \frac{\partial [c_e]}{\partial \{X\}} \right\rangle$ от матрицы

перехода $[c_e]$ не существует. Определение производной $\left\langle \frac{\partial [c_e]}{\partial \{X\}} \right\rangle$ в этом случае производится

с учетом предположения, что нет нарушений непрерывности ориентации поперечного сечения в пространстве для малых вариаций координат. Это ведет к скачкообразному изменению угла α , которое зависит от координаты, по которой берется производная. Недифференцируемость матрицы $[c_e]$ связывается с пунктом 6 правил описания локальной системы координат $x_{1e} y_{1e} z_{1e}$.

Библиографический список

1. Хог, Э. Прикладное оптимальное проектирование: механические системы и конструкции [Текст] / Э. Хог, Я. Арора. – М.: Мир, 1983 – 479 с.
2. Сергеев, О.А. Оптимальное проектирование рам с учетом ограничений по прочности и кратным частотам собственных колебаний [Текст] / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 1 (61). С. 74–81.
3. Sergeyev, O. On design of joint positions for minimum mass 3D frames [Text] / O. Sergeyev, P. Pedersen // Structural Optimization. 1996. Vol. 11. P. 95-101.
4. Sergeyev, O. Sensitivity analysis and optimal design of 3D frame structures for stress and frequency constraints [Text] / O. Sergeyev, Z. Mroz // Computers & Structures. 2000. Vol. 75, № 2. P. 167-185.
5. Lin, J.H. Structural optimization on geometrical configuration and element sizing with statical and dynamical constraints [Text] / J.H. Lin // Computers & Structures. Vol. 15, № 5. P. 507-515, 1982.
6. Любимов, А.К. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды. Практическое руководство [Текст] / А.К. Любимов. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2006. – 227 с.
7. Малков, В.П. Оптимизация упругих систем [Текст] / В.П. Малков, А.Г. Угодчиков. – М.: Наука, 1981. – 312 с.
8. Вешуткин, В.Д. Расчетное определение безопасной рабочей нагрузки узлов крепления кабельных лотков [Текст] / В.Д. Вешуткин, А.Е. Жуков, А.М. Козлинский // Транспортные системы. 2016. № 2. С. 51-67.